

IRRAZIONALI

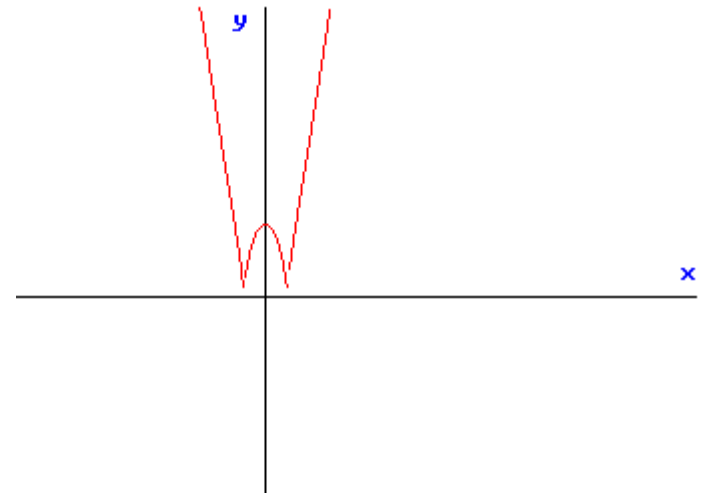
$$y = \sqrt[k]{P_n(x)} \quad \textbf{\textit{k dispari}}$$

$$y = \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$\textbf{\textit{n = 4}}$$

$$\textbf{\textit{k = 3}}$$

radice cubica



IRRAZIONALI

$$y = \sqrt[k]{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}} \quad \textbf{\textit{k dispari}}$$

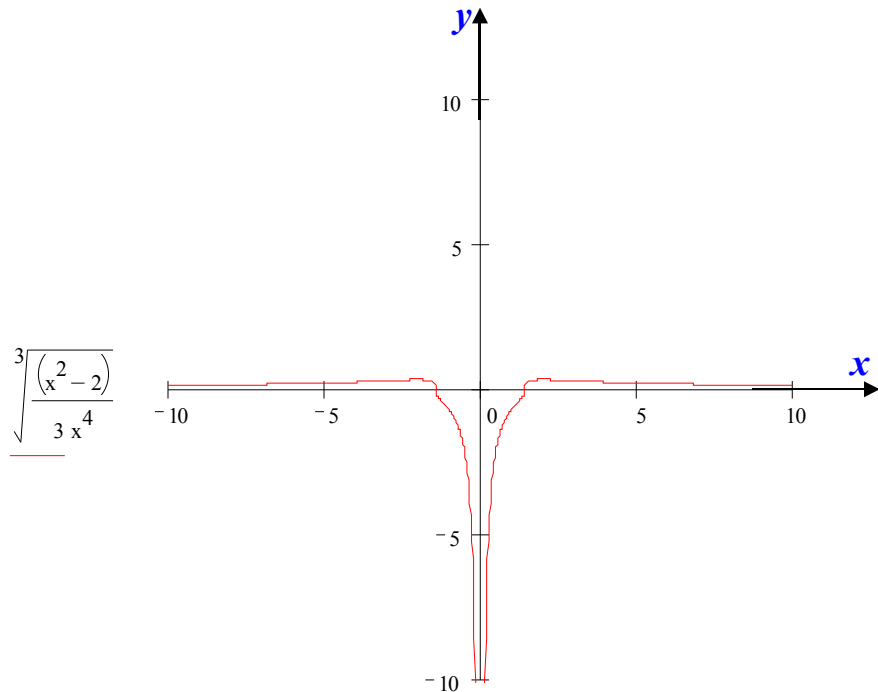
$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2}{3x^4}}$$

$$\textbf{\textit{n}} = 2$$

$$\textbf{\textit{m}} = 4$$

$$\textbf{\textit{k}} = 3$$

radice cubica



Esempio 1

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$C.E. = \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$



occorre considerare il campo di esistenza del radicando

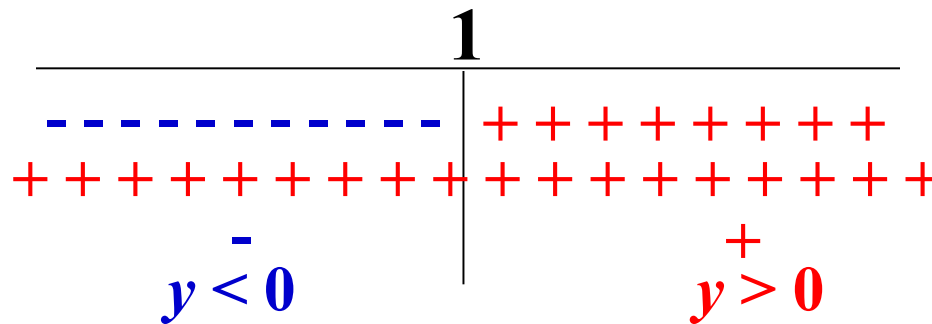
(la radice cubica in $\mathbb{R}$ esiste sempre, sia se il radicando è positivo sia se esso è negativo)

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



1) Studio del segno della funzione

$$\begin{aligned}
 y > 0 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 - 1} > 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{sempre } (\Delta < 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^3 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -1)$$

intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{x^3 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0)$$

intersezione con l'asse x

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 1} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 1} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 1)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)} = -\infty$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$



la funzione data non ha *asintoti orizzontali*

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$\begin{aligned} D\left[\sqrt[3]{x^3 - 1}\right] &= D\left[\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot D\left(x^3 - 1\right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 - 1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3 - 1\right)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 - 1\right)^2}} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ (x^3 - 1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

+++++

+++++

+

$y' > 0$

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



la funzione è sempre crescente

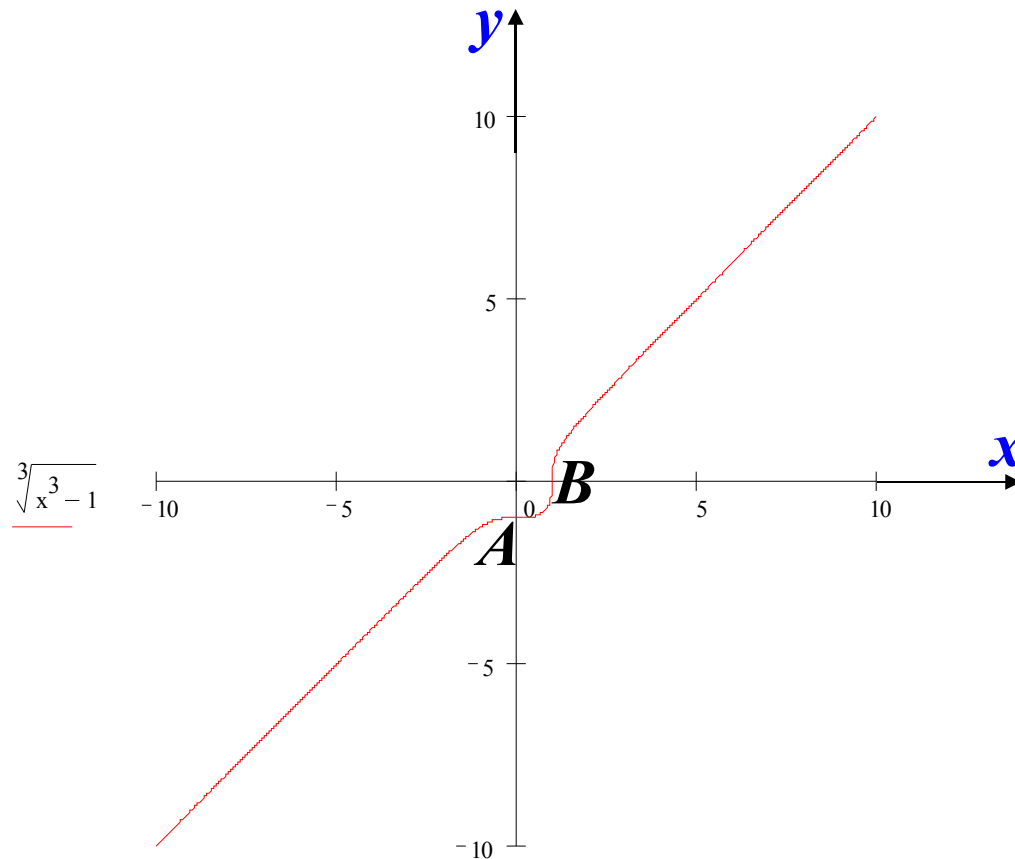


non esistono né *massimi* né *minimi* per la funzione

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$



1) Grafico della funzione



Esempio 2

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$\begin{aligned} C.E. &= \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \} = \\ &= \{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +1, +1 < x < +\infty \} \end{aligned}$$



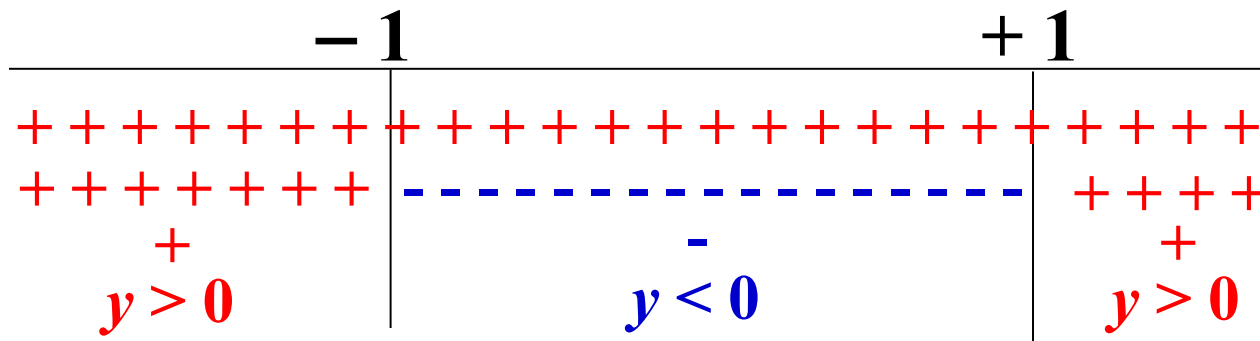
$x = -1, x = +1$
asintoti verticali (A.V.)

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x < -1, x > +1 \end{cases}$$



$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt[3]{2} \end{cases} \Rightarrow A = (0, -\sqrt[3]{2})$$

intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases}$$

**non esistono intersezioni
con l'asse x**

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



1) Limiti agli estremi del C.E.

$$C.E. = \{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +1, +1 < x < +\infty \}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1)} = 1$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



$$\begin{aligned}x \rightarrow +\infty &\Rightarrow y \rightarrow +1 \\x \rightarrow -\infty &\Rightarrow y \rightarrow +1\end{aligned}$$



la funzione data ha un *asintoto orizzontale* in $y = +1$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$D \left[\sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} \right] = D \left[\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^{\frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot D \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[\frac{2x \cdot (x^2 - 1) - (x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \right] = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^2}} \cdot \left[\frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 4x}{(x^2 - 1)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^2}} \cdot \left[\frac{-6x}{(x^2 - 1)^2} \right] = \frac{-2x}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^2} (x^2 - 1)^2}$$

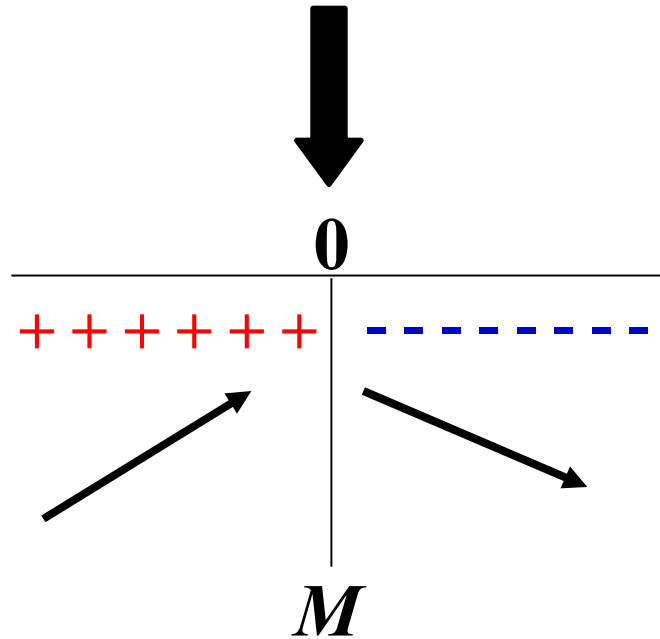
$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}\right)^2} (x^2 - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x > 0 \\ (x^2 - 1)^2 > 0 \\ \sqrt[3]{\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}\right)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \text{sempre} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x < 0$$



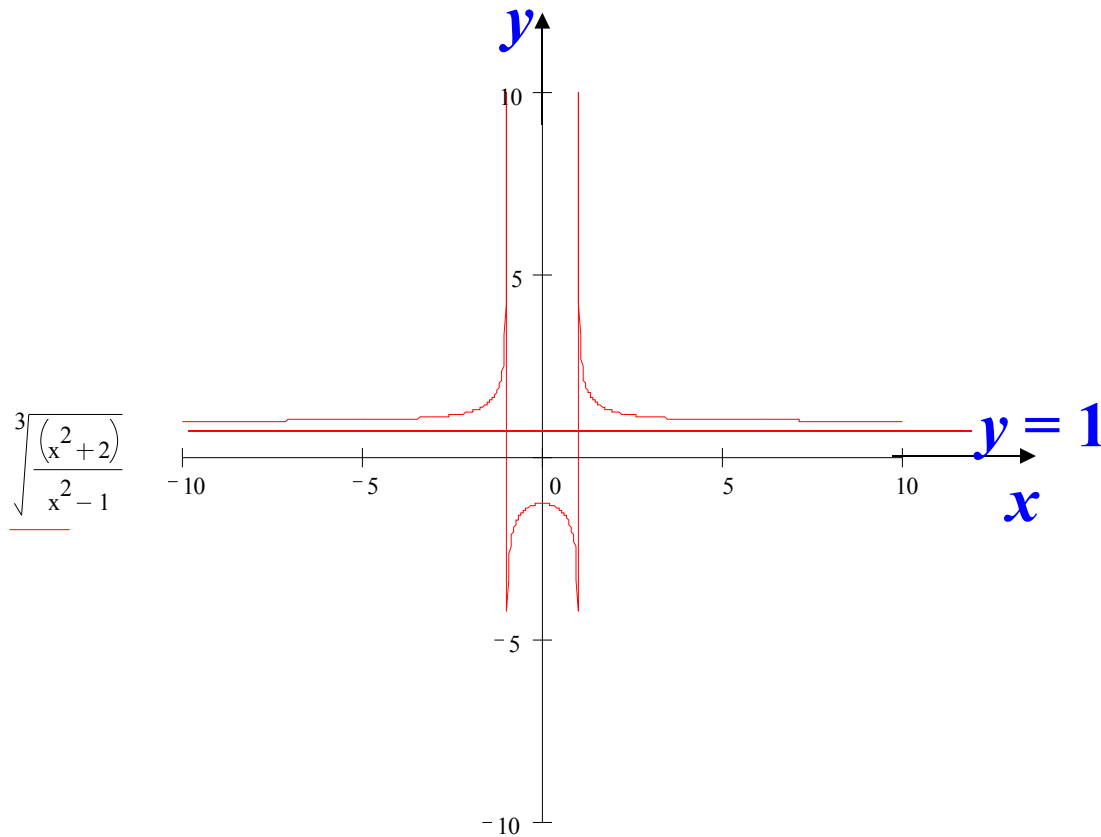
$x = 0$ è un *massimo* per la funzione

$M = (0, -\sqrt[3]{2}) \equiv A$ è un *punto di massimo* per la funzione

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$



1) Grafico della funzione



Osservazioni!

**Le funzioni irrazionali con indice di radice dispari sono definite dove è definito il radicando:
in corrispondenza dei valori per i quali il
denominatore di un radicando fratto si annulla si
ottengono gli asintoti verticali**

Le funzioni irrazionali con indice di radice dispari sono positive dove è positivo il radicando

Osservazioni!

Per studiare i limiti basta determinare il limite del radicando e poi estrarre la radice del valore trovato

Per studiare il segno della derivata prima della funzione è sufficiente studiare il segno della derivata prima del radicando (il suo denominatore sarà sempre una radice con indice di radice dispari ma radicando elevato al quadrato, quindi positivo)